УДК 51

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ДУАЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

© Н.Ю. Новиков

Аннотация. Рассмотрены определенные геометрические, механические и аналитические задачи на многообразиях, которые связаны с алгеброй дуальных чисел. Построены аналоги стереографической проекции и расширенная плоскость дуального переменного. Изучено действие группы G дробно-линейных преобразований на множестве «обобщенных окружностей». Найдены классы транзитивности.

Ключевые слова: дуальные числа; степенной ряд; уравнения Коши–Римана; аналитическая функция; дифференцируемость; проекция

Введение

В данный момент довольно интенсивно изучаются различные виды комплексных чисел. Важные, но не решенные до сегодняшнего дня задачи, над которыми работают ученые всего мира, связаны с учением о комплексных числах [1–4].

Практически все системы самых общих комплексных чисел сводятся к трем данным разнородным системам: обыкновенные комплексные числа, двойные числа, дуальные числа.

Обыкновенные комплексные числа непосредственно связаны с задачей о решении уравнения второй и высшей степени. Эти задачи играют главную роль в алгебре и в различных разделах математического анализа. Дуальные и двойные числа, наоборот, не имеют отношения к теории квадратных уравнений с действительными коэффициентами и, в общем-то, практически не связаны с алгеброй. В основном эти числа находят применение в геометрии (также некоторое применение эти системы комплексных чисел находят в теории чисел).

§1. Дуальные числа

Дуальными числами называются символы вида $z = x + iy$, где x, y – вещественные числа. Над ними производятся действия как над многочленами от переменной i с соотношением $i^2 = 0$. Число x называют вещественной частью дуального числа z и обозначают $Re\, z$. Число y называют мнимой частью дуального числа z и обозначают $Im\, z$. Множество Λ дуальных чисел – это алгебра над $\mathbb{R}$ размерности два. Она имеет делители нуля, которыми являются числа it, где $t \in \mathbb{R}$, лежащие на мнимой оси. Отображение $z \to Re\, z$ – это гомоморфизм алгебры Λ на алгебру $\mathbb{R}$ действительных чисел.

Определим функцию e^z (*показательная функция*) на множестве дуальных чисел с помощью степенного ряда, такого же, что и для комплексных чисел:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots.$$

Во всей плоскости Λ ряд сходится. В частности,

$$e^{it} = 1 + it.$$

Так же, как и для комплексных чисел, справедлива данная формула умножения:

$$e^z e^w = e^{z+w}.$$

Мультипликативная группа Λ^* алгебры Λ состоит из чисел $z = x + iy$, для которых $x \neq 0$. Дуальное число z из Λ^* можно записать в показательной форме (с модулем x и аргументом $\varphi = y/x$):

$$z = xe^{i\varphi} = x(1 + i\varphi), \varphi = y/x \qquad (1.1)$$

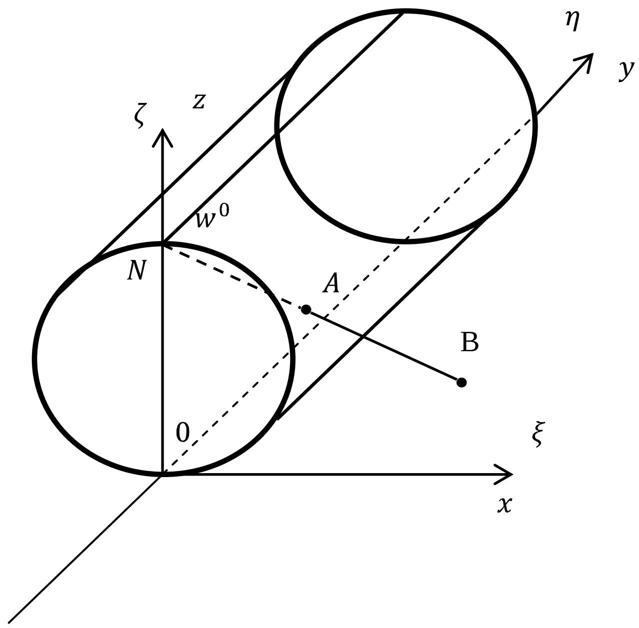
Группа автоморфизмов алгебры Λ изоморф на мультипликативной группе R^* действительных чисел: числу $\mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0$, отвечает автоморфизм $x + iy \to x + iy\mu$. В частности, числу $\mu = -1$ отвечает инволютивный автоморфизм – переход от $x + iy$ к сопряженному числу $z = x - iy$.

§2. Стереографическая проекция

Определим стереографическую проекцию для плоскости дуального переменного. Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^3$ с координатами ξ, η, ζ. Возьмем в нем цилиндр Ω (прямой круговой цилиндр радиуса 1 с осью $O\eta$), который задается уравнением:

$$\xi^2 + \zeta^2 = 1.$$

Отобразим Λ в Ω с помощью центрального проектирования из точки $w^\circ = (0, 0, 1)$, совместив плоскость $xO\eta$ и плоскость xOy (плоскость Λ).



Это отображение назовем стереографической проекцией, оно задается формулами:

$$\xi = \frac{2x}{1+x^2}, \eta = \frac{2y}{1+x^2}, \zeta = \frac{x^2-1}{1+x^2} \quad (1.2)$$

Образ отображения (1.2) есть Ω без верхней образующей $l = (0, \eta, 1)$. Стереографическая проекция есть взаимно однозначное отображение. Обратное отображение задается следующими формулами:

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}, y = \frac{\eta}{1-\zeta} \quad (1.3)$$

следовательно,

$$z = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta} \quad (1.4)$$

Цилиндр Ω назовем *расширенной плоскостью* дуального переменного. Обозначим его $\overline{\Lambda}$.

При стереографической проекции сечение цилиндра Ω плоскостью $a\xi + b\eta + c\zeta = d$ переходит в кривую

$$(c - d)x^2 + 2ax + 2by = c + d \qquad (1.5)$$

Назовем кривую (1.5) «обобщенной окружностью» по аналогии с комплексным случаем. В общем случае ($c \neq d, b \neq 0$) это – парабола. Если плоскость проходит через w^0 и $b \neq 0$, то это – прямая (не вертикальная). Если $b = 0$ и плоскость пересекает Ω, то это – одна ($c = d$) или две ($c \neq d$) вертикальные прямые.

§3. Уравнения Коши–Римана

Определение: функция $f(z) = f(x + i\eta)$ называется дифференцируемой в точке $w = a + ib$, если ее приращение в этой точке можно представить в виде $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$, *где* $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$

Пусть функция $w = f(z)$ является дифференцируемой в точке $a = p + iq$, тогда по теореме о линейном приближении $\Delta w = A\Delta z + \alpha\Delta z, \alpha \to 0$, при $\Delta z \to 0$.

Теорема. Для того чтобы функция $w = f(z)$ являлась дифференцируемой в точке $a = p + iq$, необходимо и достаточно, чтобы в точке (p, q) были дифференцируемы ее действительная и мнимая части $u(x, y), v(x, y)$ как действительная функция двух действительных переменных и при этом выполнялись уравнения

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = 0 \end{cases} \text{– уравнения Коши–Римана.}$$

Доказательство.

Обозначим $\Delta w = \Delta u + i\Delta v, A = M + iN$, а вместо $\Delta z = \Delta x + i\Delta y, \alpha = \xi + i\eta$.

После замены получаем

$$\Delta u + i\Delta v = (M + iN)(\Delta x + i\Delta y) + (\xi + i\eta)(\Delta x + i\Delta y),$$

далее раскроем скобки, получим

$$\Delta u + i\Delta v = M\Delta x + Mi\Delta y + iN\Delta x + \xi\Delta x + \xi i\Delta y + i\eta\Delta x,$$

где

$$\Delta u = M\Delta x + \xi\Delta x,$$
$$\Delta v = M\Delta y + N\Delta x + \xi\Delta y + \eta\Delta x.$$

Видно, что функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (p, q), причем

$$u_x = M, v_y = M, v_x = N, u_y = 0.$$

Следовательно, получаем уравнения

$$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = 0 \end{cases}$$

§4. Аналитические функции

Функция $f(z)$ называется дифференцируемой в области D, включена в Λ, если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Из уравнения Коши–Римана

$$u(x, y) = \varphi(x)$$
$$v(x, y) = \varphi'(x)y + \psi(x).$$

Следовательно, аналитическая функция есть

$$f(z) = \varphi(x) + i(\varphi'(x)y + \psi(x)), \tag{2.1}$$

с дифференцируемыми $\varphi(x)$и $\psi(x)$. Производная d/dz действует как d/dx, поэтому, если функции f отвечает пара φ, ψ, то функции $f\,'$ отвечает пара φ', ψ', в том случае, если φ дифференцируема дважды. Матрица Якоби отображения $z \rightarrow f(z)$ есть

$$\begin{pmatrix} \varphi' & 0 \\ \varphi''y + \psi' & \varphi' \end{pmatrix}$$

Поэтому угловой коэффициент $y'(t)/x'(t)$ кривой $z(t) = x(t) + iy(t)$ при отображении $z \rightarrow f(z)$ меняется на число $(\varphi''y + \psi')/\varphi'$. Мы видим, что разность угловых коэффициентов кривых в точке пересечения не изменяется. Назовем мерой угла (с направлением) между прямыми $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ разность их угловых коэффициентов $k_1 - k_2$. Мерой угла (с направлением) между кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в точке их пересечения с абсциссой x_0 назовем меру угла между их касательными, то есть $f'_1(x_0) - f'_2(x_0)$. Таким образом, аналитическая функция является *конформным* отображением: функция сохраняет углы между кривыми.

В частности, функция e^z– аналитическая:

$$e^z = e^x + ie^x y,$$

ее производная равна ей самой.

Список литературы

1. *Альфорс Л.* Преобразование Мёбиуса в многомерном пространстве. М.: Мир, 1986.
2. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М.: Наука, 1989.
3. *Молчанов В.Ф.* Элементарные представления группы Лагерра // Математические заметки. 1978. Т. 23. Вып. 1. С. 31-39.
4. *Яглом И.М.* Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. М.: Наука, 1969.

Поступила в редакцию 25.01.2018 г.
Отрецензирована 03.03.2018 г.
Принята в печать 05.04.2018 г.

Информация об авторе:
Новиков Никита Юрьевич – магистрант по направлению подготовки «Математика». Тамбовский государственный университет им. Г.Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: luksluks13@mail.ru

ANALYTICAL FUNCTIONS OF DUAL VARIABLE

Novikov N.Y., Master's Degree Student on Training Direction "Mathematics". Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation. E-mail: luksluks13@mail.ru

Abstract. Considered certain geometric, mechanical and analytical problems on manifolds that are related to the algebra of dual numbers. Build some analogues of stereographic projection and the extended plane of the dual variable. Studied the action of group G of fractional-linear transformations on the set of "generalized circles". Transitivity classes are found.

Keywords: dual numbers; formal power series; Cauchy-Riemann equation; analytic function; differentiability; projection

References

1. Alfors L. *Preobrazovanie Mebiusa v mnogomernom prostranstve* [Mobius Transformation in a Multidimensional Space]. Moscow, Mir Publ., 1986. (In Russian).
2. Arnold V.I. *Matematicheskie metody klassicheskoy mekhaniki* [Mathematical Methods of Classical Mechanics]. Moscow, Nauka Publ., 1989. (In Russian).

3. Molchanov V.F. Elementarnye predstavleniya gruppy Lagerra [Elementary representations of the Laguerre group]. *Matematicheskie zametki – Mathematical Notes*, 1978, vol. 23, no. 1, pp. 31-39. (In Russian).
4. Yaglom I.M. *Printsip otnositel'nosti Galileya i neevklidova geometriya* [Galileo Relativity Principle and non-Euclidean Geometry]. Moscow, Nauka Publ., 1969. (In Russian).

Received 25 January 2018
Reviewed 3 March 2018
Accepted for press 5 April 2018